

VII SKYRIUS

ŠILUMINIS SPINDULIAVIMAS

Žinoma, kad visi kūnai, kurių temperatūra virš nulio, skleidžia elektromagnetines bangas, t. y. praranda energiją. Jų vidinė energija kartu ir temperatūra turi mažėti. Jei temperatūra nekinta, reiškia yra pastovus energijos papildymas.

Kūno skleidžiamoji elektromagnetinė spinduliuotė, atsirandanti dėl jo vidinės energijos mažėjimo, vadinama *šilumine* arba *temperatūrine*. Didėjant kūno temperatūrai, spinduliuotės tankis didėja.

Kūnas ne tik spinduliuoja, bet ir sugeria šiluminę spinduliuotę. Gali nusistovėti termodinaminė pusiausvyra tarp spinduliuotės ir kūno. Iš visų spinduliuočių tik šiluminė gali būti *pusiausvyrioji*.

Tarkim, kad ertmėje, kuri apsupta idealiai atspindinčiu sluoksniu, yra kūnas. Jo skleidžiamoji spinduliuotė neišsisklaido erdvėje, bet atsispindėjusi nuo sienelių pasilieka ertmėje, krinta vėl į kūną ir iš dalies sugeriama. Tokiomis sąlygomis jokio energijos nuostolio nėra. Tačiau tai nereiškia, kad kūnas ir spinduliuotė tarpusavyje yra pusiausvyroje. Tokios sistemos energiją sudaro spinduliuotės energija, t. y. elektromagnetinių bangų energija, ir kūno vidinė energija. Sistemos būseną bus pusiausvyrioji, jei su laiku energijos pasiskirstymas tarp spinduliuotės ir kūno nesikeičia.

Įdėkime į ertmę įkaitintą kūną. Jei per vienetinį laiką kūnas išspinduliuoja daugiau energijos nei sugeria, jo temperatūra krinta. Šiuo atveju spinduliuotė susilpnėja iki to momento, kai susidaro pusiausvyra. Tokia pusiausvyrioji būseną yra stabili.

7.1. PAGRINDINIAI ŠILUMINIO SPINDULIAVIMO DĖSNIAI

Pagrindinis šiluminę spinduliuotę nusakantis dydis yra jo *temperatūra*. Tarkim, kad turime kelis kūnus, įkaitintus iki skirtingų temperatūrų ir esančių ertmėje, apsuptoje šilumos nepraleidžiančiuoju apvalkalu ir idealiai atspindinčiomis sienelėmis, o viduje vakuumas, t. y. nėra šilumos apsikeitimo laidumo ir konvekcijos būdu. Kūnai energija keičiasi spinduliuotės būdu. Kiekvieno kūno spinduliuotė priklauso nuo jo temperatūros. Be to, šiltesnieji kūnai vėsta, nes spinduliuoja didesnę energijos kiekį, negu gauna iš su-

pančiųjų kūnų, o šaltesnieji kūnai įkaista, nes gauna daugiau energijos, negu atiduoda. Ertmės vidus visuomet užpildytas spinduliuotės energija. Bandymai rodo, kad galiausiai nusistovi stacionarioji būseną (šiluminė pusiausvyrą), kurioje visi kūnai įgyja vienodą temperatūrą. Tokioje būsenoje kūnai per vienetinį laiką sugeria tiek energijos, kiek atiduoda, ir spinduliuotės energijos tankis erdvėje įgyja tam tikrą vertę, atitinkančią duotąją temperatūrą. Iš to išplaukia, kad jei dviejų kūnų sugerties geba skirtinga, jų spinduliavimo geba negali būti vienoda. Kitaip tariant, jei du kūnai sugeria skirtingą energijos kiekį, tai ir jų spinduliuotės yra skirtingos.

Kūno *spinduliavimo geba* E yra energijos srautas, skleidžiamas vienetiniu kūno paviršiumi visomis kryptimis: $E = d\Phi/dS$.

Jei į vienetinį paviršių krinta šviesos srautas $d\Phi$, tai jo dalį $d\Phi'$ kūnas sugeria. Tada santykis $A = d\Phi'/d\Phi$ vadinamas kūno *sugerties geba*.

Šiluminėje spinduliuotėje yra įvairios spektrinės sudėties elektromagnetinių bangų, todėl spinduliavimo ir sugerties gebos turi būti priskiriamos tam tikram spektriniam ruožui $d\nu$:

$$d\Phi_\nu = E_\nu d\nu;$$

čia E_ν – koeficientas, nusakantis kūno spinduliavimo gebą dažniui ν .

Prisiminus sąryšį $\lambda = c/\nu$, galima išreikšti taip:

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu.$$

Minuso ženklas čia fizikinės prasmės neturi.

Galima ir taip parašyti:

$$d\Phi_\lambda = E_\lambda d\lambda.$$

Jei $d\lambda$ ir $d\nu$ atitinka tą patį spektrinį ruožą, tai $d\Phi_\nu = d\Phi_\lambda$ ir

$$E_\nu = E_\lambda \frac{\lambda^2}{c} = E_\lambda \frac{c}{\nu^2}.$$

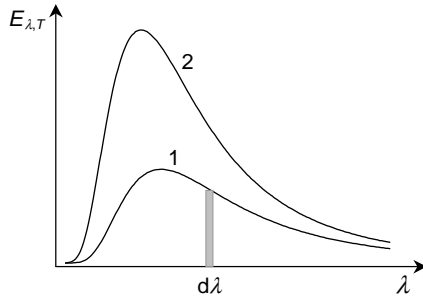
Bandymuose pastebėta, kad spinduliavimo geba priklauso ne tik nuo dažnio (arba bangos ilgio), bet ir nuo spinduliuojančiojo kūno temperatūros, todėl reikia dar prirašyti ir indeksą T :

$$d\Phi_\nu = E_{\nu,T} d\nu.$$

Įvertinus kūno spinduliuotę kiekviename spektro ruože, galima apskaičiuoti pilnutinę spinduliavimo gebą:

$$E_T = \int d\Phi_v = \int_0^\infty E_{v,T} dv.$$

Šiluminio spinduliavimo gebos skirstinys spektre pavaizduotas 7.1.1 pav. Užbrūkšniuota juostelė atitinka energiją dE_T , skleidžiamą ruože



7.1.1 pav. Spinduliavimo gebos spektrinis skirstinys skirtingose temperatūrose

$d\lambda$. Pilnutinė spinduliavimo geba nusakoma kreivės ribojamu plotu. Didėjant temperatūrai, kūno spinduliuojama energija didėja (2-oji kreivė); didėja skirstinio kreivės ribojamas plotas, t. y. didėja pilnutinė kūno spinduliavimo geba.

Kūno sugerties geba taipogi priklauso nuo dažnio (arba bangos ilgio) ir temperatūros. Kūnas, kuris visiškai sugeria krintančiąją į jį visų dažnių spinduliuotę, vadinamas *juodoju kūnu*; jo sugerties geba $A_{v,T} = 1$.

Sąryšį tarp kūno spinduliavimo gebos ir sugerties gebos nusako **Kirchhofo dėsnis**: *spinduliavimo ir sugerties gebos dalmuo nepriklauso nuo kūno prigimties*. Santykis $E_{v,T}/A_{v,T}$ yra vienodas visiems kūnams ir yra universalioji dažnio ir temperatūros funkcija, nors atskirai įvairių kūnų $E_{v,T}$ ir $A_{v,T}$ gali gerokai skirtis.

Juodajam kūnui (jo sugerties geba lygi vienetui) galima užrašyti taip:

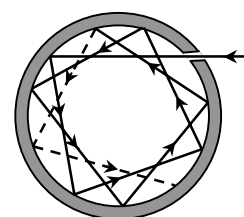
$$\frac{E_{v,T}}{A_{v,T}} = \epsilon_{v,T};$$

čia $\epsilon_{v,T}$ – juodojo kūno spinduliavimo geba.

Taigi universalioji Kirchhofo funkcija yra ne kas kita, kaip juodojo kūno spinduliavimo geba.

Gamtoje nėra kūnų, kurie savo savybėmis atitiktų juodąjį kūną. Suardžiais arba platinos juoduliui padengtų kūnų sugerties geba artima vienetui tik ribotame bangos ilgių ruože. Tolimojoje infraraudonojoje spektro srityje jų sugerties geba mažesnė už vienetą. Tačiau galima pagaminti įrenginį, kuris savo savybėmis labai artimas juodajam kūnui. Tai beveik uždara ertmė (7.1.2 pav.) difuziškai atspindinčiomis sienelėmis su nedidele skylute. Bet koks spindulys, patekęs per skylutę į ertmės vidų, išeina iš jos tik po labai didelio atspindžių skaičiaus. Jei vieno atspindžio metu atsispindi šviesos

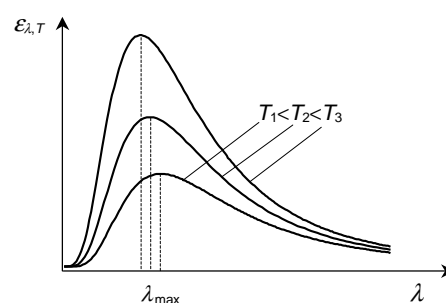
srauto dalis k , tai po n atspindžių jis susilpnėja k^n kartų. Kadangi $k < 1$, tai esant dideliam n dydis k^n tampa menkas. Reiškia, tik labai maža šviesos dalis sugeba išeiti iš ertmės, ir tokio įrenginio sugerties geba labai artima vienetai visiems bangos ilgiams.



7.1.2 pav. Juodojo kūno modelis

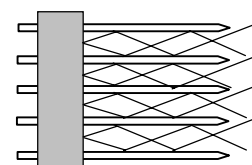
Paviršiaus, kurio $A_\lambda \approx 1$, spinduliavimo geba pagal Kirchhofo dėsnį artima juodojo kūno spinduliavimo gebai. Ertmės sienelių skleidžiama spinduliuotė sklinda jos viduje, iš dalies atsispindi nuo sienelių, iš dalies sugerama. Ertmės viduje nusistovi pusiausvyra tarp spinduliavimo ir sugerties. Jos vidų užpildo elektromagnetinės įvairaus ilgio, poliarizacijos ir intensyvumo bangos, netvarkingai judančios visomis kryptimis. Išėjusi iš skylutės, ši spinduliuotė nusako juodojo kūno, kurio temperatūra T lygi sienelių temperatūrai, spinduliavimo gebą.

Realizavus tokį juodojo kūno modelį, galima tirti sklindančiosios iš ertmės per skylutę spinduliuotę, naudojant jautrų imtuvą bei spektrinį prietaisą, t. y. galima gauti eksperimentinį funkcijos $\epsilon_{\lambda,T}$ pavidalą, esant įvairioms temperatūroms (7.1.3 pav.).



7.1.3 pav. Juodojo kūno spinduliuotės energijos skirstinys skirtingose temperatūrose

Kirchhofo dėsnis yra bendrasis ir visiškai nepriklauso nuo sugerties pobūdžio. Bet kuri smarkiai sugerianti sistema smarkiai ir spinduliuoja. Pvz., poliruotų plieno adatų sistema (7.1.4 pav.) smarkiai sugeria šviesą, nes spinduliai prieš išeidami į išorę patiria daugkartinį atspindį nuo įvairių adatų plotelių. Nors adatų paviršiai sugeria nedidelę šviesos srauto dalį, tačiau bendroji sistemos sugertis bus ženkli. Įkaitinus tokią sistemą, ji smarkiai ir spinduliuoja, nes kiekvienas adatos paviršiaus plotelis ne tik pats spinduliuoja, bet ir atspindi į išorę daugelį spindulių, kuriuos skleidžia kiti ploteliai.



7.1.4 pav. Poliruotų plieno adatų sistema

Taip aiškinama suodžių, barchato ir kt. medžiagų smarki sugertis. Dėl jų poriškumo patekusi į jas šviesa medžiagos sluoksnyje daug kartų atsispindi. Taip aiškinama ir sodri barchato spalva.

Kūnai, kurių sugerties geba mažesnė už vieneta, vadinami *pilkaisiais*. Jų spinduliavimo geba mažesnė už juodojo kūno spinduliavimo gebą.

Kirchhofo dėsnis iškėlė šiluminio spinduliavimo teorijai svarbią užduotį – nustatyti analitinę funkcijos $\varepsilon_{\lambda,T}$ išraišką. Ilgą laiką daugelis mėginimų neišsprendė bendrosios užduoties. Teorinė Kirchhofo funkcijos išraiška buvo nustatyta tik pakeitus kai kuriuos fizikos pagrindus ko pasekmėje atsirado kvantinė teorija.

Pirmasis etapas tiriant šiluminį spinduliavimą buvo **Stefano ir Bolcmano dėsnis**, kuris teigia, kad *juodojo kūno suminė* (visiems bangos ilgiams) *spinduliavimo geba proporcinga temperatūrai ketvirtajame laipsnyje*:

$$\varepsilon_T = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu,T} d\nu = \sigma T^4 ;$$

čia σ – Stefano ir Bolcmano pastovioji, kuri lygi $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$.

Remdamasis termodinamika ir elektromagnetine šviesos teorija Vynas nustatė, kad juodojo kūno spinduliavimo geba išreiškiama taip:

$$\varepsilon_{\nu,T} = c \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right);$$

čia c – šviesos greitis; $f(\nu/T)$ – funkcija, kurios išreikšti pagal termodinamiškos įvaizdžius nepasisekė.

Vyno formulę galima ir taip užrašyti:

$$\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{c^5}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right). \quad (7.1.1)$$

Iš šios išraiškos galima gauti sąryšį tarp bangos ilgio λ_{\max} , kuri atitinka didžiausia funkcijos $\varepsilon_{\lambda,T}$ vertė, ir temperatūros T . Tam (7.1.1) išraišką reikia išdiferencijuoti pagal λ ir pirmąją išvestinę prilyginti nuliui. Tada gaunama:

$$T \lambda_{\max} = b; \quad (7.1.2)$$

čia b – Vyno pastovioji, nepriklausanti nuo temperatūros ($b = 0,29 \text{ cm} \cdot \text{K}$).

(7.1.2) išraiška vadinama **Vyno postūmio dėsnium**, kuris teigia, kad *didėjant temperatūrai juodojo kūno spinduliavimo gebos maksimumas slenka į trumpesniųjų bangų sritį*.

Reilis ir Džinsas (*Jeans*), pasinaudoję klasikinės statistikos teorema apie energijos tolygų pasiskirstymą pagal laisvės laipsnius, pateikė tokią išraišką:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT \quad \text{arba} \quad \varepsilon_{\lambda,T} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT.$$

Tai Reilio ir Džinso formulės.

Šios išraiškos patenkinamai atitinka eksperimentinius duomenis tik ilgųjų bangų srityje ir gerokai skiriasi mažųjų bangų srityje. Atsiranda prieštaravimai. Pvz., integruojant pagal λ , išreiškiama taip:

$$\varepsilon_T = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda,T} d\lambda = 2\pi c kT \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^4} = \infty,$$

t. y. juodojo kūno pilnutinė spinduliavimo geba turi būti be galo didelė. Tai reiškia, kad pusiausvyra tarp materialųjų kūnų ir spinduliuotės gali susidaryti tik esant begaliniam spinduliuotės tankiui. Tačiau bandymuose gaunama, kad pusiausvyra tarp spinduliuotės ir kūno susidaro bet kokioje temperatūroje ir šioje pusiausvyroje spinduliuotės energijos tankis, atvirkščiai, yra menkas palyginus su energijos tankiu, esančiu materialiuose kūnuose.

Taigi Reilio ir Džinso formulė, išreikšta remiantis klasikine fizika, prieštarauja faktui – didesnioji energijos dalis šiluminės spinduliuotės spektre yra trumpesniųjų bangų srityje. Tokia padėtis pavadinta *ultravioletine katastrofa*.

Reilio ir Džinso formulė kokybiškai tinka ilgesniųjų bangų srityje. 1896 m. Vynas pateikė tokią formulę:

$$\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{A}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{B}{\lambda T}\right)$$

(čia A ir B – pastoviosios), kuri šiek tiek tinka trumpesniųjų bangų srityje, bet netinka ilgesniųjų bangų srityje.

Taigi XIX a. pabaigoje buvo dvi formulės, kurios kokybiškai atitiko eksperimentinius rezultatus ribotose spektro srityse, bet nė viena nenusakė visos eksperimentinės kreivės. Tapo aišku, kad klasikinė fizika nesusidoroja su šiluminiu spinduliavimu ir reikia iš esmės peržiūrėti jos pagrindinius teiginius.

7.2. PLANKO FORMULĖ

Klasikinė elektrodinamika galėjo sėkmingai aiškinti tik tuos optinius reiškinius, kuriuose elementarieji šviesos sąveikos su medžiaga procesai nėra esminiai. Tuo tarpu nagrinėjant šiluminį spinduliavimą, šie procesai yra svarbūs. Todėl šiluminio spinduliavimo problemų klasikinė elektrodinamika išspręsti nepajėgė.

Klasikinės fizikos pagrindus peržiūrėjo Plankas (1900 m.). Jis iškėlė mintį, kuri iš esmės prieštaravo klasikinės statistinės fizikos ir elektrodinamikos įvaizdžių sistemai. Jo hipotezė teigia, kad *elektromagnetinė spinduliuotė spinduliuojama ne tolygiai, o atskiromis porcijomis (kvantais)*, kurių energijos dydis proporcingas dažniui:

$$\varepsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda};$$

čia $h = 6,622 \cdot 10^{-34}$ J·s – universalioji pastovioji, vėliau pavadinta Planko konstanta.

Planko hipotezė aiškiai prieštarauja klasikinės fizikos dėsniams, nes iš jų išplaukia, kad visi dydžiai (energija, impulsas, poveikis) gali laisvai įgyti bet kokias kiek norima mažas vertes ir gali kisti tolygiai. Pagal klasikinius dėsnius ν dažnio osciliatorius gali turėti savyje įvairią energiją, kuri proporcinga amplitudei kvadratu. Tai reiškia, kad osciliatorius per vienetinį laiką gali spinduliuoti bet kokį energijos kiekį. Teoriškai modeliuojant juodąjį kūną kaip begalinę harmoninių osciliatorių visumą, kiekvienas iš kurių skleidžia atskirą monochromatinę bangą, o visi kartu – ištisinę juodąją spinduliuotę, ir naudojantis dėsniais, valdančiais šių osciliatorių veikimą, galima nustatyti tokios sistemos juodojo kūno spinduliavimo dėsnį.

Tačiau toks kelias nedavė norimų rezultatų. Tik Planko teiginys, kad *harmoninis ν dažnio osciliatorius gali turėti tokį energijos kiekį, kuriame yra kartotinis elementariųjų dydžių $h\nu$ skaičius ($E_n = nh\nu$)*, pateikė teisingą rezultatą. Reikia nagrinėti ne medžiagos osciliatorius – spinduliuotojus, o spinduliuotės osciliatorius, atinkančius elektromagnetinėms bangoms; čia atliekamas taip vadinamas „skleidimas į osciliatorius“.

Remiantis naujaisiais kvantiniais įvaizdžiais ir statistiniais metodais, Plankas pateikė spinduliavimo gebos išraišką, sutampančią su eksperimentu:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}; \text{ arba } \varepsilon_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1}.$$

Tai *Planko formulė*.

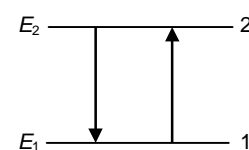
Teoriniuose skaičiavimuose vietoje spinduliavimo gebos $\epsilon_{\nu,T}$ naudojamas spektrinis spinduliuotės energijos tankis $u_{\nu,T}$, tarp kurių toks sąryšis:

$$\epsilon_{\nu,T} = (c/4) u_{\nu,T}.$$

Pateiksime Planko formulės išvedimą pagal Einšteino samprotavimus. Tačiau prieš tai susipažinsime su kai kuriais kvantinės teorijos įvaizdžiais.

Naudodamas Planko idėjas, Boras išvystė atomo spinduliavimo kvantinę teoriją. Pagal ją atomas nusakomas tam tikromis stacionariomis būsenomis, kuriose jis būdamas nespinduliuoja. Energijos spinduliavimas arba sugertis susijusi su atomo šuoliu iš vienos stacionariosios būsenos į kitą (7.2.1 pav.). Tokio šuolio metu spinduliuojama arba sugerama monochromatinė banga, kurios dažnį lemia stacionariųjų būsenų energijų skirtumas:

$$h \nu = E_2 - E_1.$$



7.2.1 pav. Energijos lygmenų schema

Einšteinas papildė Boro kvantinę teoriją kiekybiškai aprašydamas šviesos sugerties ir spinduliavimo procesus.

Panagrinėsime vienodų atomų dujas. Pagal Borą kiekvienas atomas gali būti stacionariosiose būsenose 1, 2, 3, ..., kurių energijos E_1, E_2, E_3, \dots . Vidutinis atomų skaičius i -oje būsenoje, kurios energija E_i , vadinamas i -ojo *lygmens užpilda*, priklausanti nuo išorinių sąlygų. Jei, pvz., dujos temperatūroje T yra termodinaminėje pusiausvyroje, tai užpilda nusakoma Bolcmano skirstiniu:

$$N_i = N_0 \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right); \quad (7.2.1)$$

čia N_0 – atomų skaičius vienetiniame tūryje apatiniame lygmenyje.

Bendriausiu atveju (7.2.1) formulėje reikia įrašyti statistinį lygmens svorį g_i , nusakantį lygmens išsigimimą.

Nagrinėdamas spinduliuotės sąveiką su atomais, Einšteinas išskyrė tris procesus: savaiminį (spontaninį) spinduliavimą, sugertį ir priverstinį (indukuotąjį) spinduliavimą. Visi procesai nagrinėjami statistiškai, t. y. naudojant tikimybės sampratą.

Jei atomas yra būsenoje 2 ir nepatiria išorinio poveikio, jis gali savaime (spontaniškai) pereiti į būseną 1, kur energija mažesnė ir atiduoda energijos skirtumą $E_2 - E_1$ fotono pavidalu. Toks procesas vadinamas *savaimi-*

niu šviesos spinduliavimu, kuris nusakomas savaiminio šuolio $2 \rightarrow 1$ tikimybe A_{21} per vienetinį laiką. Dydis A_{21} dar vadinamas *savaiminio šuolio Einšteino koeficientu*.

Žemiausiame lygmenyje esantys nesužadintieji atomai, veikiami išorinio elektromagnetinio lauko, pereina į sužadintąją būseną sugerdami energijos $E_2 - E_1 = h\nu$ fotoną. Suprantama, sugerties šuolio tikimybė dažnių ruože nuo ν iki $\nu + d\nu$ proporcinga spektriniam spinduliuotės energijos tankiui u_ν . Šia prasme galima kalbėti apie poveikio į nagrinėjamą procesą galimybę. Sugerties tikimybė per vienetinį laiką lygi $B_{12}u_\nu$. Koeficientas B_{12} , nusakantis atominės sistemos sužadavimo tikimybę, vadinamas *sugerties Einšteino koeficientu*.

Apart to Einšteinas pateikė ir *priverstinio (indukuotojo) spinduliavimo* įvaizdį. Veikiant išoriniam elektromagnetiniam laukui, sužadintoje būsenoje esantys atomai (pvz., būsenoje E_2), pagal Einšteiną, gali ne tik sugerti energiją, bet ir sugrįždami į žemesnį energijos lygmenį išspinduliuoti energijos $h\nu = E_2 - E_1$ fotoną. Pastarieji šuoliai yra priverstiniai ir nusako priverstinį spinduliavimą. Kitaip tariant, $h\nu$ energijos fotonas gali sukelti kvantinį šuolį atome iš lygmens E_2 į E_1 , dėl ko atsiranda dar vienas $h\nu$ energijos fotonas. Dėl priverstinių šuolių atsiradę spinduliuotės parametrai (dažnis, fazė, sklidimo kryptis, poliarizacija) yra tokios pat, kaip ir pirminės spinduliuotės. Tokių šuolių tikimybė per vienetinį laiką yra $B_{21}u_\nu$. Koeficientas B_{21} vadinamas *priverstinio spinduliavimo Einšteino koeficientu*. Jei išorinio lauko nėra ($u_\nu = 0$), priverstiniai šuoliai nevyksta.

Taigi išorinis elektromagnetinis laukas iššaukia šuolius, lydumus kaip sugertimi, taip ir spinduliuote.

Pereisime prie Planko formulės išvedimo.

Tarkime, kad uždarame tūryje yra dujos tam tikroje termodinaminėje temperatūroje T ir elektromagnetinis laukas, kurio spektrinis energijos tankis $u_{\nu,T}$. Sistema yra termodinaminėje pusiausvyroje. Tarp atomų ir lauko vyksta pastovus energijos apsikeitimas. Atomai sugeria ir spinduliuoja kvantus, pereidami iš vienos būsenos į kitą. Šie procesai visumoje nesuardo sistemos termodinaminės pusiausvyros.

Atomų skaičius, spontaniškai pereinantis per vienetinį laiką iš viršutinio lygmens į apatinį, proporcingas jų skaičiui viršutiniame lygmenyje N_2 ir lygus $A_{21}N_2$.

Atomų skaičius, pereinantis iš viršutinio sužadintojo lygmens į apatinį veikiant spinduliuotei, proporcingas sužadintųjų atomų skaičiui N_2 ir krantinčiosios spinduliuotės spektriniam energijos tankiui $u_{\nu,T}$. Sužadintųjų ato-

mų priverstinių šuolių per vienetinį laiką skaičius į žemesnį lygmenį lygus $B_{21}N_2u_{\nu,T}$. Suminis savaiminių ir priverstinių šuolių skaičius, t. y. bendrasis išspinduliuotų kvantų skaičius, lygus $A_{21}N_2 + B_{21}N_2u_{\nu,T}$. Lygmenyje E_1 esantys atomai gali pereiti į aukštesnį E_2 tik krintančiosios spinduliuotės energijos sąskaita, todėl tokių šuolių ir sugertųjų kvantų per vienetinį laiką skaičius bus lygus $B_{12}N_1u_{\nu,T}$.

Nusistovėjus pusiausvyrai tarp spinduliavimo ir dujų, sugertųjų ir išspinduliuotųjų per vienetinį laiką kvantų skaičius vienodas, t. y.

$$A_{21}N_2 + B_{21}N_2u_{\nu,T} = B_{12}N_1u_{\nu,T}. \quad (7.2.2)$$

Čia atomų skaičius lygmenyse nusakomas Bolcmano skirstiniu:

$$N_1 = N_0 \exp(-E_1/kT); \quad N_2 = N_0 \exp(-E_2/kT).$$

Jų dalmuo yra lygus

$$\frac{N_1}{N_2} = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) = \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (7.2.3)$$

Iš (7.2.2) formulės panaudojus (7.2.3) galima išreikšti taip:

$$u_{\nu,T} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(B_{12}/B_{21})(N_1/N_2) - 1} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(B_{12}/B_{21})\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (7.2.4)$$

Einšteino koeficientus A_{21} , B_{21} , B_{12} galima tiksliai apskaičiuoti tik žinant elektromagnetinio lauko sąveiką su atomu dėsnius. Tačiau (7.2.4) išraiškoje esančių šių koeficientų dalmenis galima nustatyti iš paprastų bendrųjų samprotavimų:

1. Kai temperatūros labai aukštos ($T \rightarrow \infty$), $\exp(h\nu/kT) \rightarrow 1$ ir (7.2.4) išraiška įgyja tokį pavidalą:

$$u_{\nu,T} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(B_{12}/B_{21}) - 1}.$$

Manant, kad elektromagnetinis laukas ertmės viduje yra šiluminis, galima išreikšti spinduliuotės gebą:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{c}{4} u_{\nu,T} = \frac{c}{4} \frac{A_{21}/B_{21}}{(B_{12}/B_{21}) - 1}.$$

Tačiau be galo aukštoje temperatūroje atomų energija turi būti be galo didelė ir jų spinduliavimo geba $\varepsilon_{\nu,T} \rightarrow \infty$. Taip atsitiks, jei vardiklis taps lygus nuliui, t. y. kai $B_{12} = B_{21}$. Įrašius į (7.2.4), išreiškiama taip:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{c}{4} \frac{A_{21}/B_{21}}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (7.2.5)$$

2. Mažų dažnių srityje atskiro kvanto energija mažesnė už šiluminio judėjimo energiją, t. y. $h\nu \ll kT$. Tada per vienetinį laiką spinduliuojama ir sugerama toks didelis kvantų skaičius, kad spinduliuotė gali būti suprantama tolydine. Kitaip tariant, mažų dažnių srityje (7.2.5) išraiška turi būti tapatinga Reilio ir Džinsio formulėi.

Kai $h\nu \ll kT$, tai $h\nu/kT \ll 1$. Tada eksponentinę funkciją galima išskleisti eilute ir apsiriboti dviem jos nariais:

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = 1 + \frac{h\nu}{kT}.$$

Irašoma į (7.2.5) formulę ir prilyginama Reilio ir Džinsio išraiškai:

$$\varepsilon_{\nu,T} \approx \frac{c}{4} \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{kT}{h\nu} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT.$$

Iš čia

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3},$$

ir išplaukia Planko formulė:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Ribiniu atveju, kai dažniai maži, Planko formulė tampa Reilio ir Džinsio formulė. Kai dažniai labai dideli, $h\nu \gg kT$ ir vardiklyje galima nekreipti dėmesio į vienetuką. Gaunama Vyno formulė, kuri gerai aprašo eksperimentinius rezultatus trumpųjų bangų srityje. Dažnių skalėje Vyno formulė atrodo taip:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right).$$

Iš fizikinės pusės tai reiškia, kad spinduliuote lydimoose šuoliuose įskaitomi tik savaiminiai šuoliai, nusakomi koeficientais A_{mn} . Taigi trumpųjų bangų srityje priverstinę spinduliuotę sukeltys šuoliai vaidina mažą

vaidmenį ir visas spinduliavimas vyksta dėl savaiminių šuolių. Ilgųjų bangų srityje, atvirkščiai, pagrindinai vyksta priverstiniai šuoliai.

Planko formulė gerai atitinka eksperimentinius duomenis ir yra pilnutinis Kirchhofo išskeltos pagrindinės užduoties sprendinys. Planko formulė apima savyje du pagrindinius juodojo kūno spinduliavimo dėsnius – Stefano ir Bolcmano bei Vyno dėsnius.

Planko formulė fotonų kalboje reiškia, kad šviesos bangos lauko energija yra fotonų, sukuriančių šį lauką, energijų suma. Pusiausvyrosios spinduliuotės energijos tankis išreiškiamas taip:

$$u(\omega) = \hbar \omega N(\omega);$$

čia ω – ciklinis dažnis ($\omega = 2\pi\nu$), $\hbar = h/2\pi$, funkcija $N(\omega)$ vadinama fotonų pasiskirstymo pagal dažnius funkcija:

$$N(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}.$$

Anksčiau buvo pabrėžta, kad kai $\hbar \omega \ll kT$ Planko formulė tampa Reilio ir Džinso formule. Tai reiškia, kad aukštose temperatūrose, kai vidutinė osciliatorių energija gerokai didesnė už atstumą tarp jo būsenų, osciliaatoriaus energijos kvantavimo efektas yra neesminis.